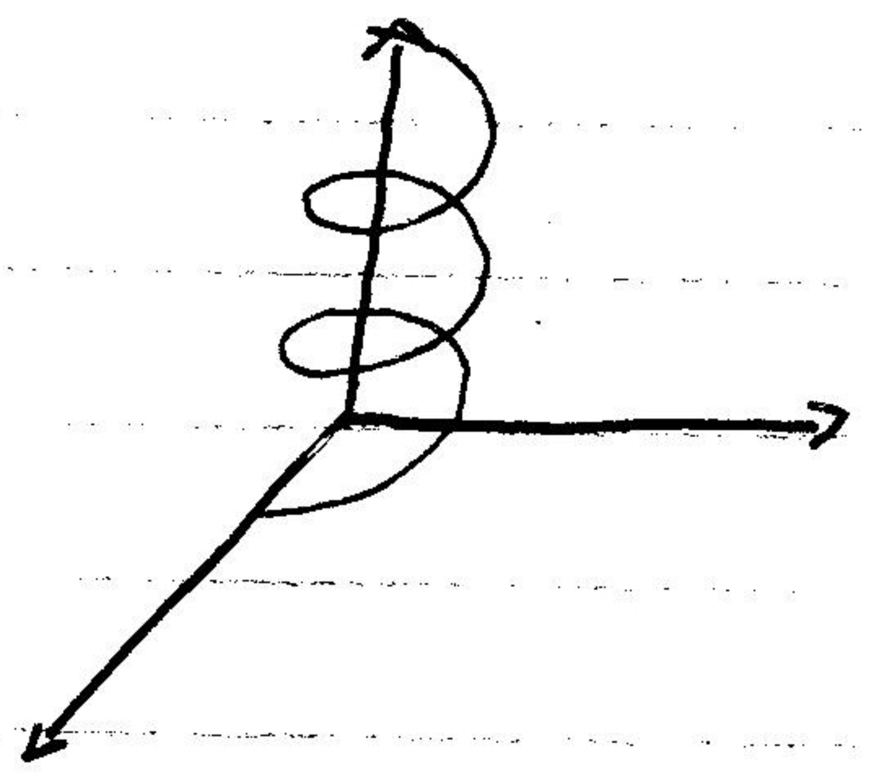
Παράδειγμα:

Ένα ελατήριο περιγράφεται από την ελικοειδή καμπύλη $\vec{r}(t) = \cos(4t)\vec{i} + \sin(4t)\vec{j} + t\vec{k}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\rho = 1$, να βρεθεί η μάζα του και η ροπή αδράνειας ως προς z.



Μάζα: $m = \int_C \rho \, ds$

Στοιχειώδες μήκος: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, το μέτρο της $\frac{ds}{dt} = |\vec{v}|$
$\rightsquigarrow ds = |\vec{v}| dt$

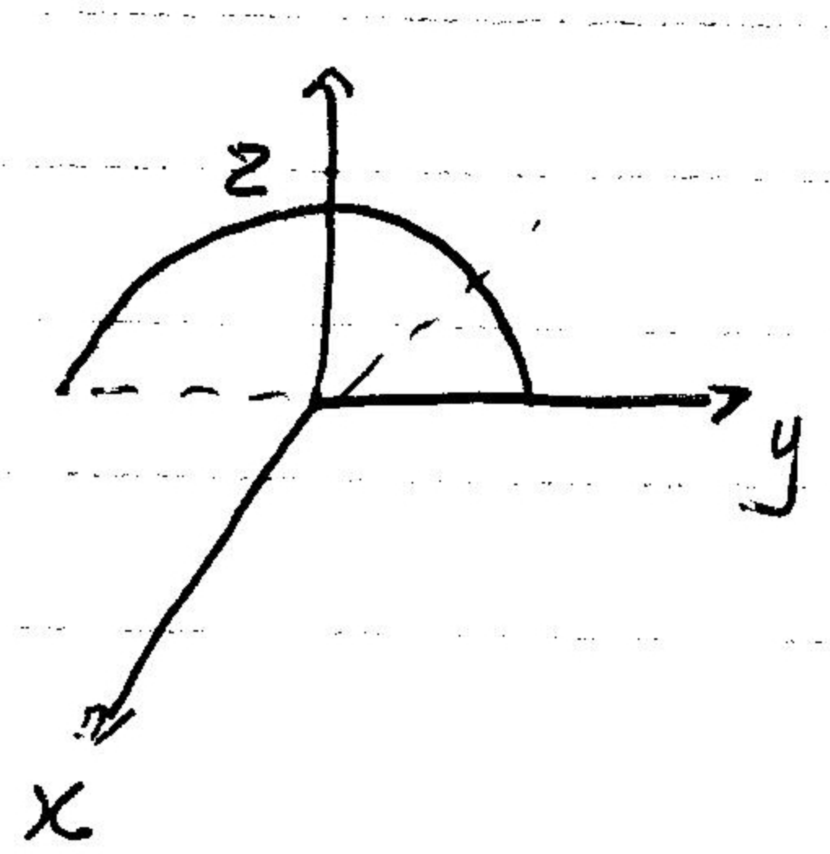
Οπότε $m = \int_C \rho |\vec{r}'(t)| dt \overset{\rho=1}{=} \int_0^{2\pi} |\vec{r}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{17} \, dt$

$= 2\pi\sqrt{17}$

$I_z = \int_C (x^2+y^2) \rho \, ds = \int_0^{2\pi} \underbrace{(\cos^2(4t) + \sin^2(4t))}_{1} \sqrt{17} \, dt$

$= m$.

Παράδειγμα: $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, $\rho = 2 - z$.
Να βρεθεί το κέντρο μάζας.



$m = \int_C \rho \, ds = \int_C (2-z) \, ds$

$\vec{r}(t) = 0\vec{i} + \cos t\vec{j} + \sin t\vec{k}$, $t \in [0, \pi]$

Διανύσματα (Επανάληψη)

Οι βασικές έννοιες της μηχανικής περιγράφονται από τρία μεγέθη:

(α) βαθμωτά (scalar), δηλαδή μεγέθη που μια ποσότητα αρκεί για να περιγραφεί.

(β) διανυσματικά μεγέθη (vector), μεγέθη που περιγράφονται από το μέτρο και την κατεύθυνσή τους στο χώρο. Έχουν διεύθυνση και φορά.

(γ) Τανυστικά μεγέθη (tensor), μεγέθη που περιγράφονται με περισσότερες από τρεις συνιστώσες

Εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$, θ η γωνία $\vec{A}, \vec{B}$

Φυσικά, αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{A}, \vec{B}$ κάθετα

Εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο

$$\left.\begin{aligned} \bar{A} &= \alpha_1 \bar{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k} \\ \bar{B} &= b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \vec{k} \end{aligned}\right\} \quad \bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Το $|\vec{A} \times \bar{B}|$ εμβαδόν του παραλληλογράμμου $\vec{A}, \vec{B}$

Αν $\vec{A} \times \vec{B} = \bar{0}$, $\vec{A} \parallel \vec{B}$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Διανύσματα (Επανάληψη)

Οι βασικές έννοιες της μηχανικής περιγράφονται από τρία μεγέθη:

(α) βαθμωτά (scalar), δηλαδή μεγέθη που μια ποσότητα αρκεί για να περιγραφεί.

(β) διανυσματικά μεγέθη (vector), μεγέθη που περιγράφονται από το μέτρο και την κατεύθυνσή τους στο χώρο.
Έχουν διεύθυνση και φορά.

(γ) Τανυστικά μεγέθη (tensor), μεγέθη που περιγράφονται με περισσότερες από τρεις συνιστώσες

Εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$, θ η γωνία $\vec{A}, \vec{B}$

Φυσικά, αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{A}, \vec{B}$ κάθετα.

Εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &= \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k} \\ \vec{B} &= b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k} \end{aligned}\right\} \quad \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Το $|\vec{A} \times \vec{B}|$ εμβαδόν του παραλληλογράμμου $\vec{A}, \vec{B}$

Αν $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$, $\vec{A} \parallel \vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Τελεστής ανάδελτα :

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

Κλίση (gradient)

$$\text{grad} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \in \mathbb{R}^3$$

Απόκλιση (divergence)

$$\text{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$$

Στροβιλισμός (curl)

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Διανυσματικά πεδία

Όταν κινούμαστε στο χώρο χρησιμοποιούμε διανύσματα για την περιγραφή φυσικών φαινομένων.
Πριν ακόμη μιλήσουμε για κίνηση πρέπει να έχουμε αίσθηση της κατεύθυνσης.

Ορισμός: διανυσματικό πεδίο σε μια περιοχή του χώρου ή του επιπέδου, είναι η συνάρτηση που αντιστοιχίζει ένα διάνυσμα σε κάθε σημείο της περιοχής αυτής.
Γράφουμε:

$$\bar{F}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\,\bar{i} + f_2(x,y,z)\,\bar{j} + f_3(x,y,z)\,\bar{k}$$

ή στο επίπεδο

$$\bar{F}(x,y) = f_1(x,y)\,\bar{i} + f_2(x,y)\,\bar{j}.$$

Το πεδίο $\bar{F}$ καλείται συνεχές, αν οι συνιστώσες είναι συνεχείς. Ομοίως διαφορίσιμο, ολοκληρώσιμο κ.λ.π.

Παράδειγμα: Βαρυτικό πεδίο της γης.

$$\bar{F} = GM\,\frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,,\quad G, M \text{ σταθερές.}$$